演習問題A

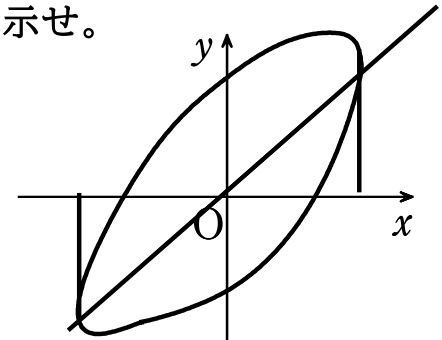
（１） 曲線 $2x^2-2xy+y^2=4$ について　次のことを示せ。

（ｉ）この方程式を y について解くと

$y=x\pm\sqrt{4-x^2}$ となる

（ii）曲線によって囲まれた囲まれた部分の面積は

半径2の円の面積に等しい



（２）半径 a の円Oの直径AB上に　点Pをとる。Pを通るABに垂直な弦QRが底辺で　高さが h である二等辺三角形を　円Oの面に対して垂直につくる。PがAからBまで移動するとき　この三角形が通過してできる立体の体積を求めよ。

（３）曲線 $y=e^x$ とこの曲線上の点 $(1,\ e)$ における接線　および y 軸で囲まれた部分の面積S, この部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積Vをそれぞれ求めよ。

（４）Oを座標平面上の原点　$a>0$ とする。

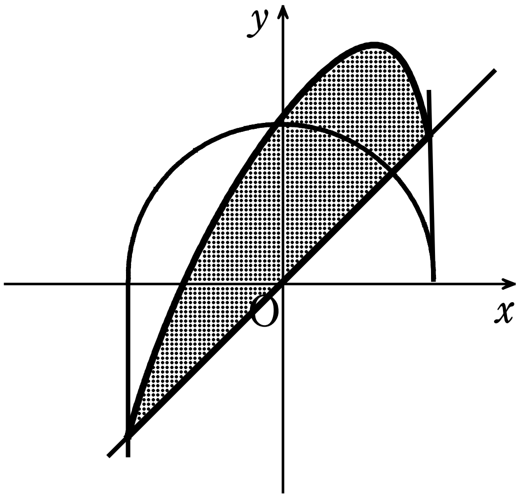
曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上に2点 A $(1,\ 1)$, P$\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ をとる。線分OP,OAおよび曲線の弧 $\overset{\frown}{AP}$ で囲まれた部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を $V(a)$ とする。

（ｉ） $V(a)$ を a で表せ。　　　（ii） $\lim\limits_{a\to\infty}V(a)$ を求めよ。

（５）曲線 $x=e^{-t}\cos t,\ y=e^{-t}\sin t\quad(0\leqq t\leqq a,\ a\neq 0)$ の長さをLとする。

（ｉ） $L(a)$ を a で表せ。　　　（ii） $\lim\limits_{a\to\infty}V(a)$ を求めよ。

解答



（1）曲線 $y=x\pm\sqrt{4-x^2}$ は直線 $y=x$ に

によって面積が二等分されていることが

図示より分かる。

そこで　曲線 $y=x+\sqrt{4-x^2}$ を図示

その面積を求める。直線 $y=x$ と半円

$y=\sqrt{4-x^2}$ を合成すると右図。

面積 $\dfrac{S}{2}$ は右図の点線部分の面積より

$\dfrac{S}{2}=\displaystyle\int_{-2}^{2}\left\{\left(x+\sqrt{4-x^2}\right)-x\right\}dx=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$　即ち　この面積Sは

半径2の円の面積に等しい

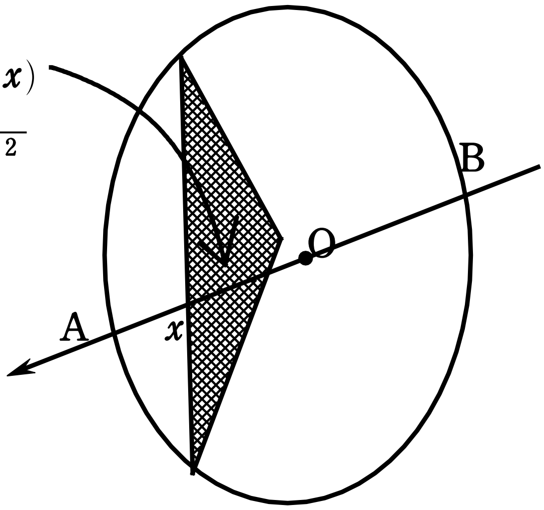
反省　2つの曲線の差に着目して

$$面積S=\int_{-2}^{2}\left\{\left(x+\sqrt{4-x^2}\right)-\left(x-\sqrt{4-x^2}\right)\right\}dx$$

$$=2\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$　⇐　こっちの解法が簡単ですね！

（2）直径ABを x 軸にとって　$P(x)$, $A(a)$, $B(-a)$

とおく。



二等辺三角形の面積

$S(x)=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{a^2-x^2}\times h=h\sqrt{a^2-x^2}$

従って　通過する二等辺三角形が作る立体の

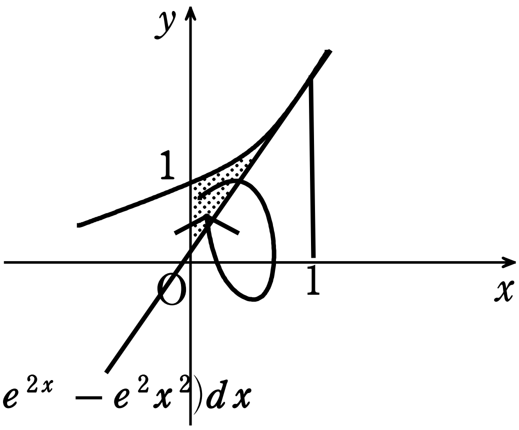
体積　$V=\displaystyle\int_{-a}^{a}S(x)dx=2h\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$$=2h\times\frac{\pi a^2}{4}$$

$$=\frac{\pi a^2 h}{2}$$

（３）曲線 $y=e^x$ 上の点 $(1,\ e)$ における接線の

方程式　$y-e=e(x-1)$ より $y=ex$



囲まれた部分の面積S＝ $\int_0^1 (e^x-ex)dx$

$$=\left[e^e-\frac{ex^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}e-1$$

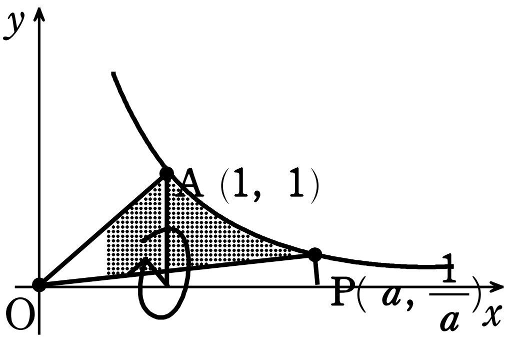
回転体の体積V＝ $\pi\int_0^1\{(e^x)^2-(ex)^2\}dx=\pi\int_0^1(e^{2x}-e^2x^2)dx$

$$=\pi\left[\frac{e^{2x}}{2}-\frac{e^2x^3}{3}\right]_0^1=\pi\left\{\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{e^2}{3}-0\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{6}(e^2-3)\pi$$

（４）回転体の体積Ｖとその極限

（ｉ）A(1, 1)　P($a,\ \frac{1}{a}$) のとき $V(a)$



A, Pから x 軸への垂線の足を A', P'とおく

直角三角形ＯＡＡ’の回転体の体積 $V_1=\pi\int_0^1(x)^2dx=\frac{\pi}{3}$

弧 $\overset{\frown}{AP}$ の回転体の体積

$$V_2=\pi\int_1^a\left(\frac{1}{x}\right)^2dx=\pi\left[\frac{x^{-1}}{-2+1}\right]_1^a=-\pi\left(\frac{1}{a}-1\right)=\pi\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

直角三角形ＯＰＰ’の回転体の体積

$$V_3=\pi\int_0^a\left(\frac{1}{a^2}x\right)^2dx=\frac{\pi}{a^4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{\pi}{a^4}\left(\frac{a^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)=\frac{\pi}{3a}$$

ゆえに　体積　$V=V_1+V_2-V_3=\pi\left(\frac{1}{3}+1-\frac{1}{a}-\frac{1}{3a}\right)=\pi\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{3a}\right)$

$$=\frac{4\pi}{3}\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

（ii）$\lim_{a\to\infty}V(a)=\frac{4}{3}\pi$

（５）曲線の長さ$\mathrm{L}(a)$とその極限

（１）$x=e^{-t}\cos t,\ y=e^{-t}\sin t,\ 0\leqq t\leqq a\quad a\fallingdotseq 0$

$$\mathrm{L}(a)=\int_0^a\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

ここで　$\dfrac{dx}{dt}=-e^{-t}\cos t+e^{-t}(-\sin t)=-e^{-t}(\cos t+\sin t)$

$\dfrac{dy}{dt}=e^{-t}(\cos t-\sin t)$

よって　$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=e^{-2t}(1+2\cos t\sin t+1-2\cos t\sin t)$

$=2e^{-2t}$

ゆえに　$\mathrm{L}(a)=\sqrt{2}\int_0^a e^{-t}dt=-\sqrt{2}\left[e^{-t}\right]_0^a=-\sqrt{2}(e^{-a}-1)$

$=\sqrt{2}\left(1-\dfrac{1}{e^a}\right)$

（ii）$\displaystyle\lim_{a\to\infty}L(a)=\sqrt{2}$